



EXERCICES 4^{ème} SEMESTRE 2006

Corrigé exercice 2: Théorie des dalles : Calcul par la méthode des bandes

1. Dimensionner l'armature dans la dalle par la méthode statique de Hillerborg (Méthode des bandes).

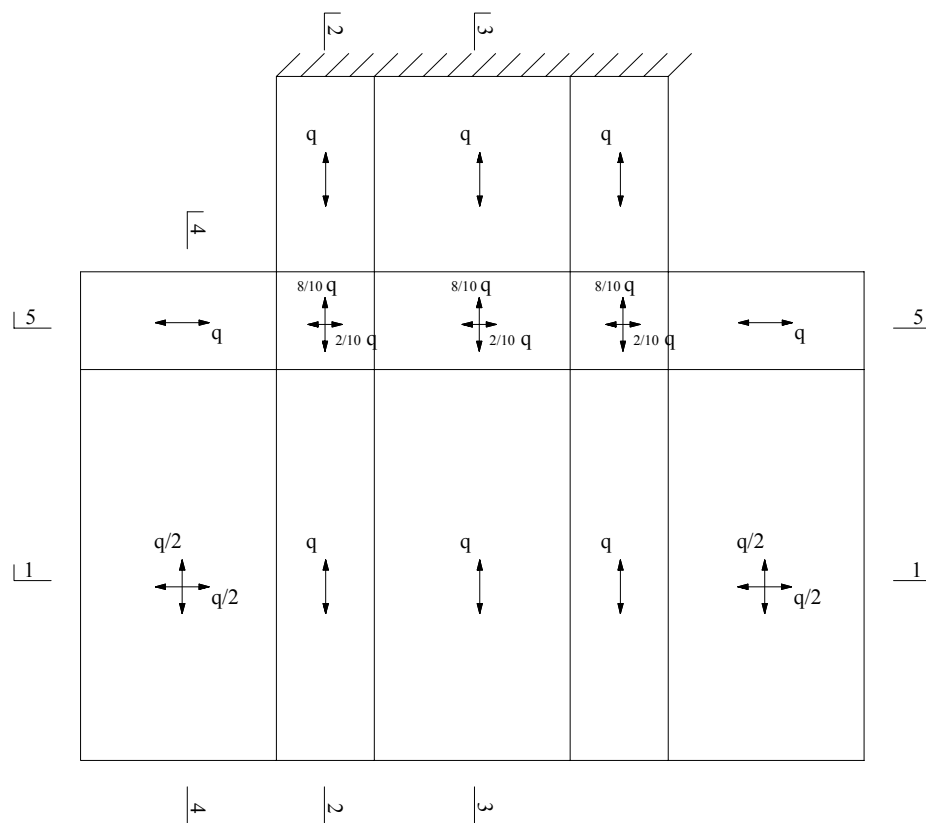


Fig.1 : Découpage de la dalle en bandes

La première étape consiste à décomposer la dalle en différentes bandes, par exemple comme sur la figure 1. Chaque bande est considérée comme une poutre qui reprend une partie de la charge appliquée. Le choix de la part de la charge supportée par une bande et respectivement par la bande perpendiculaire correspondante est fait sur la base de différents aspects dont la proximité aux appuis, la rigidité de ceux-ci et l'expérience dans l'application de cette méthode. On choisit ici la répartition décrite sur la figure 1.

Remarque : Pour ce corrigé on a utilisé coefficient \square autre que 0, 0.5 ou 1, ce qui correspond à une légère amélioration de l'approche.

Chaque bande peut ensuite être dimensionnée indépendamment comme une poutre.

Pour une classe d'exposition du béton : XC1, l'enrobage minimal c , selon norme SIA 262 § 5.2.2, vaut : 20 mm. On choisit de disposer les armatures en première nappe (hauteur statique maximale) dans la direction du moment le plus important.

Armature minimale

La norme SIA 262 prévoit de disposer une armature minimale pour assurer un comportement ductile et éviter la formation de fissures trop importantes. Pour des exigences normales, l'armature minimale est définie de la manière suivante (cf. SIA 262, § 4.4.2).

On détermine d'abord le moment de fissuration pour une bande de largeur unitaire de dalle :

$$f_{ct,d} = k_t \cdot f_{ctm} = \frac{1}{1+0.5 \cdot t} \cdot f_{ctm} = \frac{1}{1+0.5 \cdot 0.2/3} \cdot 2.9 = 2.8 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow M_r = W \cdot f_{ct,d} = \frac{bh^2}{6} \cdot f_{ct,d} = 18.7 \text{ kNm/m}$$

Remarque : la réduction d'épaisseur t à un tiers de la hauteur de la dalle est admise selon SIA 262, § 4.4.1.3.

Pour une hauteur statique moyenne d'environ $d = h - c - (\phi + \phi)/2 = 160 \text{ mm}$, l'armature nécessaire pour limiter la contrainte dans les aciers à $\sigma_{s,adm} = f_{sd} = 435 \text{ N/mm}^2$ vaut donc :

$$a_{s,min} \cong \frac{M_r}{0.9d \cdot \sigma_{s,adm}} = \frac{18.7}{0.9 \cdot 0.160 \cdot 0.435} = 299 \text{ mm}^2/\text{m} \Rightarrow \phi 8 \quad s = 150 \text{ mm} \text{ ou } \phi 10 \quad s = 200 \text{ mm}$$

Bande 1-1 :

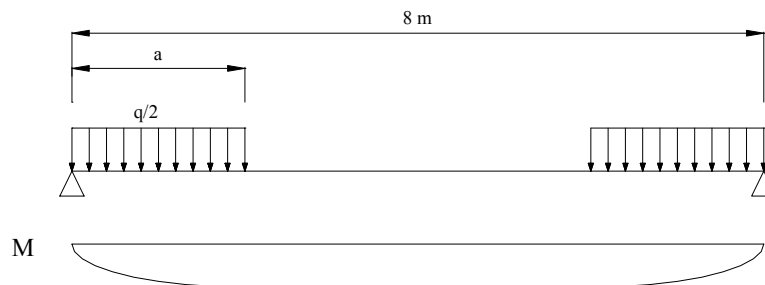


Fig.2. Système statique et chargement de la bande 1-1

Le moment maximal vaut $M_d = 0.5q_d \cdot \frac{a^2}{2} = 7 \cdot \frac{2^2}{2} = 14 \text{ kNm/m}$

Armature en 2^{ème} nappe : $d \cong 200 - 20 - 14 - \frac{10}{2} = 161 \text{ mm}$

L'armature nécessaire vaut :

$$a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{14}{0.9 \cdot 0.161 \cdot 0.435} = 222 \text{ mm}^2 / \text{m} \Rightarrow \phi 10 \text{ s} = 200 \text{ mm} \text{ (armature minimale)}$$

Bandes 2-2 et 3-3 :

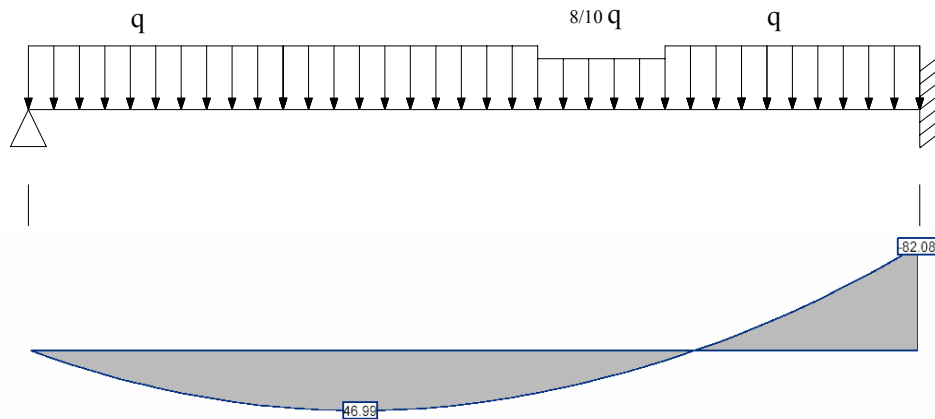


Fig.3. Système statique et chargement des bandes 2-2 et 3-3

La solution en Fig. 3 a été déterminée par le biais d'un logiciel de calcul aux éléments finis. Elle correspond donc à la solution **élastique** exacte sous charges données.

- Le moment maximal vaut $M_d = 47 \text{ kNm/m}$ à 2.6 m de l'appui simple.
- Le moment minimal vaut $M_d = -82 \text{ kNm/m}$ en encastrement.

On aurait obtenu la même solution élastique, par exemple, par le biais de la méthode des forces ou des déplacements. Dans le cas spécifique, une solution simple et du côté de la sécurité est d'admettre une charge homogène et égale à q tout le long de la bande.

Armature en 1^{ère} nappe, en travée : $d \cong 200 - 20 - \frac{14}{2} = 173 \text{ mm}$

L'armature nécessaire vaut : $a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{47}{0.9 \cdot 0.173 \cdot 0.435} = 694 \text{ mm}^2 / \text{m} \Rightarrow \phi 14 \text{ s} = 200 \text{ mm}$

Armature à l'encastrement : $d \cong 200 - 20 - \frac{18}{2} = 171 \text{ mm}$

L'armature nécessaire vaut : $a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{82}{0.9 \cdot 0.171 \cdot 0.435} = 1225 \text{ mm}^2 / \text{m} \Rightarrow \phi 18 \text{ s} = 200 \text{ mm}$

Approfondissement : bande hyperstatique, dimensionnement selon la théorie de la plasticité

On aimerait rappeler ici que la méthode de dimensionnement des bandes, développée par Hillerborg, se base sur les principes du calcul plastique et, en particulier, sur le théorème statique. Cela signifie que pour dimensionner une bande à la ruine, on est libre de choisir n'importe quel diagramme d'efforts « statiquement admissible » (équilibre et conditions de bord statiques respectés) et qui ne dépasse nulle part la résistance des matériaux. En dimensionnant les armatures selon le diagramme des efforts choisi, l'ingénieur définit lui-même le mode de rupture de la structure. Selon le théorème statique de la théorie de plasticité, la solution est du côté de la sécurité. Il faut encore vérifier que la ductilité des sections à l'état limite ultime est suffisante (rupture par écoulement de l'armature), pour s'assurer que la redistribution plastique puisse avoir lieu.

La solution élastique (moment résistant atteint en travée et sur appui simultanément) n'est que une des possibles solutions. Elle à l'avantage de conduire à un dimensionnement qui donne généralement un bon comportement à l'état limite de service (attention : la fissuration provoque aussi une redistribution !), mais elle n'est pas forcément la « meilleure solution », ni toujours la plus simple à obtenir.

Dans le cas traité par exemple, on aurait également pu dimensionner les armatures en choisissant arbitrairement la valeur du moment hyperstatique à l'encastrement. (voir TCG 8 § 7.4.7.2).

Pour opérer un choix « raisonnable » du moment d'encastrement, on peut, par exemple :

- a) considérer le diagramme des moments de la même poutre hyperstatique (avec un encastrement et un appui simple), chargée uniformément par une charge moyenne équivalente (voir Fig. a1). Les valeurs des moments à l'encastrement et en travée sont:

$$M_{-Min} = -\frac{q_{moy} l^2}{8} \quad M_{-Max} = \frac{9q_{moy} l^2}{128} \quad , \text{ avec : } q_{moy} = \frac{\int_0^l q(x) dx}{l}$$

On peut donc choisir un moment d'encastrement qui conduit à peu près au même rapport entre le moment d'encastrement et le moment à mi-travée.

- b) déterminer tout d'abord le diagramme des moments d'une poutre isostatique (appuyée aux deux extrémités), fig. a2. Choisir ensuite une valeur du moment d'encastrement, qui produit un diagramme linéaire des moments le long de la poutre, et superposer les deux diagrammes, en changeant la valeur du moment d'encastrement de sorte à obtenir une répartition suffisamment équilibrée entre les moment maximaux, positif et négatif.

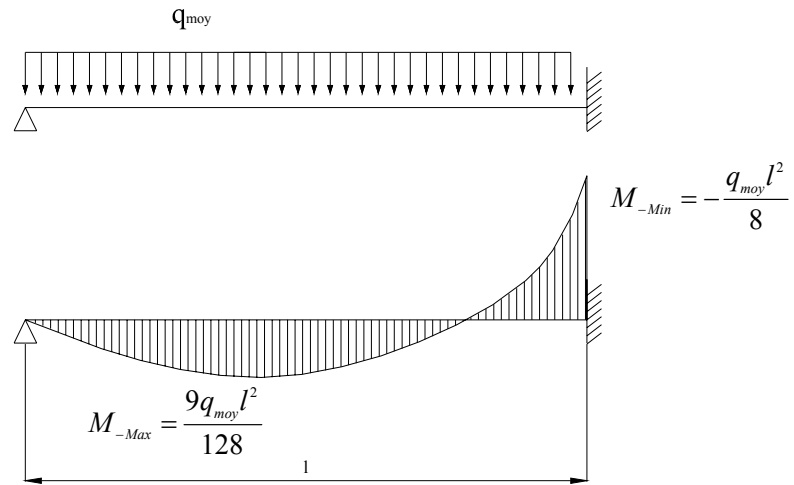


Fig. a1 : diagramme du moment dans une poutre hyperstatique, charge uniforme moyenne

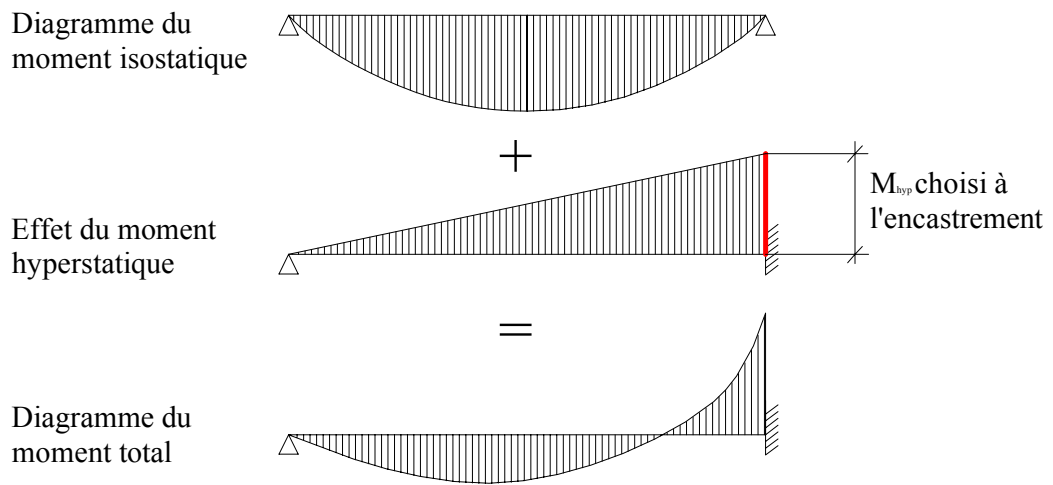


Fig. a2 : diagramme du moment isostatique et du moment triangulier du à l'encastrement

Bande 4-4 :

La bande 4-4 est appuyée sur un mur d'un côté mais n'a pas la possibilité de s'appuyer directement de l'autre côté. Elle doit prendre appui sur la bande 5-5 : on parle, dans ce cas, d'appui indirect. On peut considérer que la réaction de la bande 4-4 est répartie uniformément sur toute la largeur de la bande 5-5 (1.00 m). La résultante de la réaction d'appui est donc centrée sur la bande 5-5. Cela revient à considérer une poutre d'une portée égale à 4.50 m (Fig. 4).

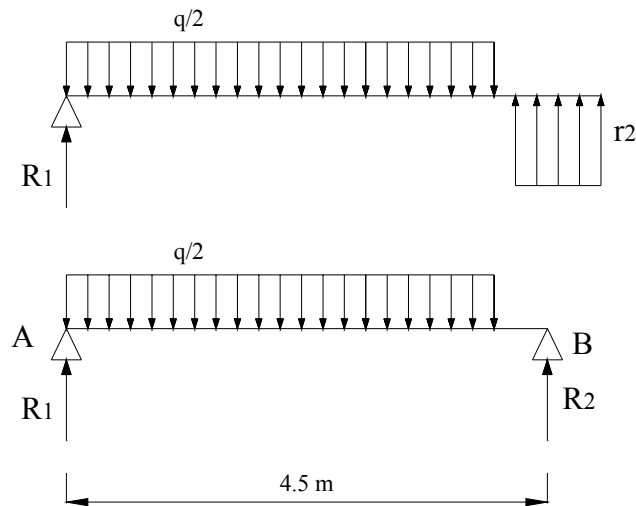


Fig.4. Système statique et chargement de la bande 4-4

La réaction d'appui R_1 peut être obtenue directement en exprimant que la somme des moments autour de l'appui B est nulle :

$$R_1 = \frac{\frac{q_d}{2} \cdot 4 \cdot 2.5}{4.5} = 1.1q_d \qquad \Rightarrow R_2 = \frac{q_d}{2} \cdot 4 - 1.1q_d = 0.9q_d$$

et $r_2 = R_2 / 1\text{ m} = 0.9q_d$

On trouve ensuite le moment maximal : $M_d = 17.3 \text{ kNm/m}$.

Pour armature disposée en 1^{ère} nappe : $d \cong 200 - 20 - 10/2 = 175 \text{ mm}$

L'armature nécessaire vaut :

$$a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{17}{0.9 \cdot 0.175 \cdot 0.435} = 248 \text{ mm}^2 / \text{m} \Rightarrow \phi 10 \text{ s} = 200 \text{ mm} \text{ (armature minimale)}$$

Bande 5-5 :

La bande 5-5 reprend donc la réaction r_2 de la bande 4 - 4 en plus des charges définies sur la figure 1.

On calcule le moment maximal à mi-travée : $M_d = 70 \text{ kNm/m}$

Armature en 2^{ème} nappe : $d \cong 200 - 20 - 14 - 18/2 = 157 \text{ mm}$

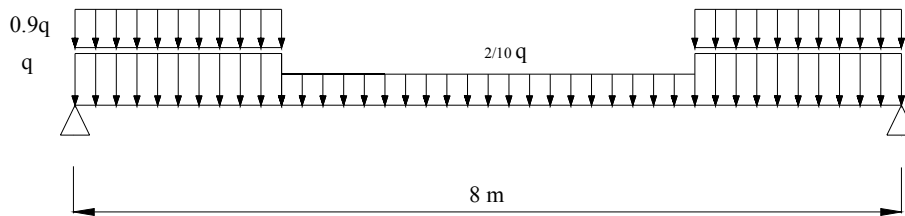


Fig.5. Système statique et chargement de la bande 5-5

L'armature nécessaire vaut :

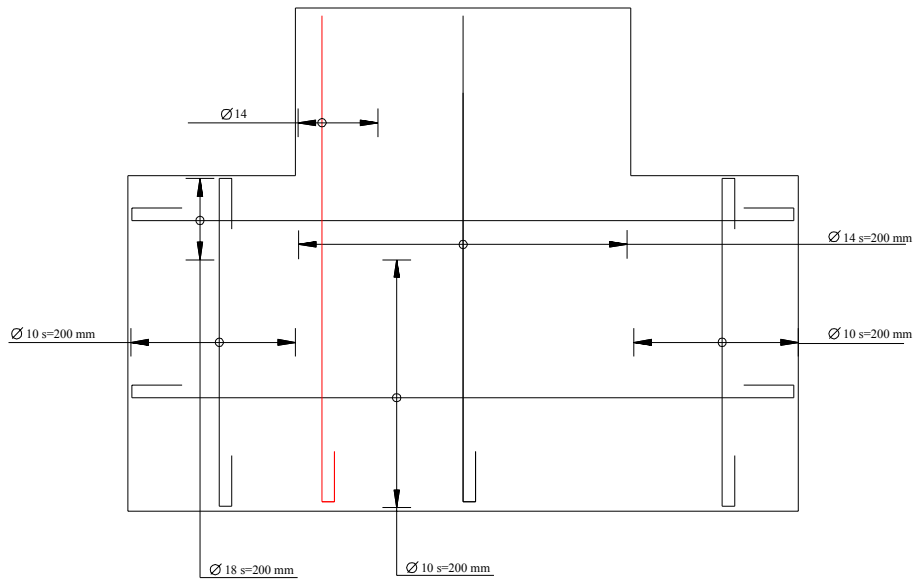
$$a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{70}{0.9 \cdot 0.157 \cdot 0.435} = 1139 \text{ mm}^2 / \text{m} \Rightarrow \phi 18 \quad s = 200 \text{ mm}$$

2. Esquisser dans la figure 3 (a et b) le schéma d'armature découlant du calcul précédent.

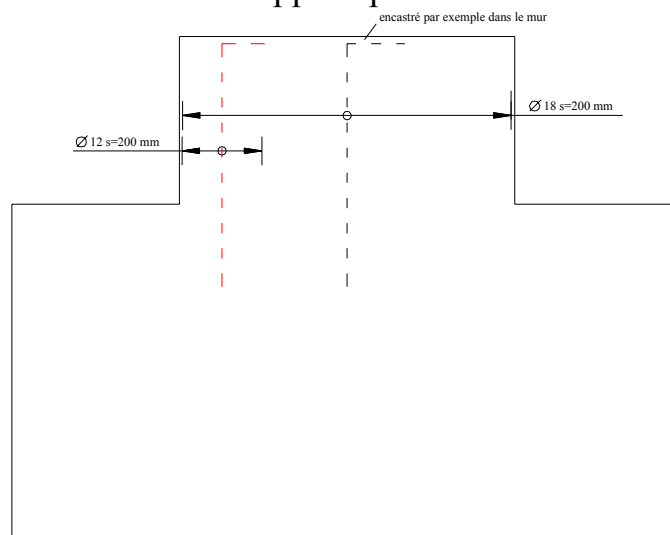
On represent ci-dessous aussi l'armature supplementaire pour la reprise du poids du coffrefort, qui sera déterminée au point 3.

Armature selon la méthode des bandes

Nappe inférieure



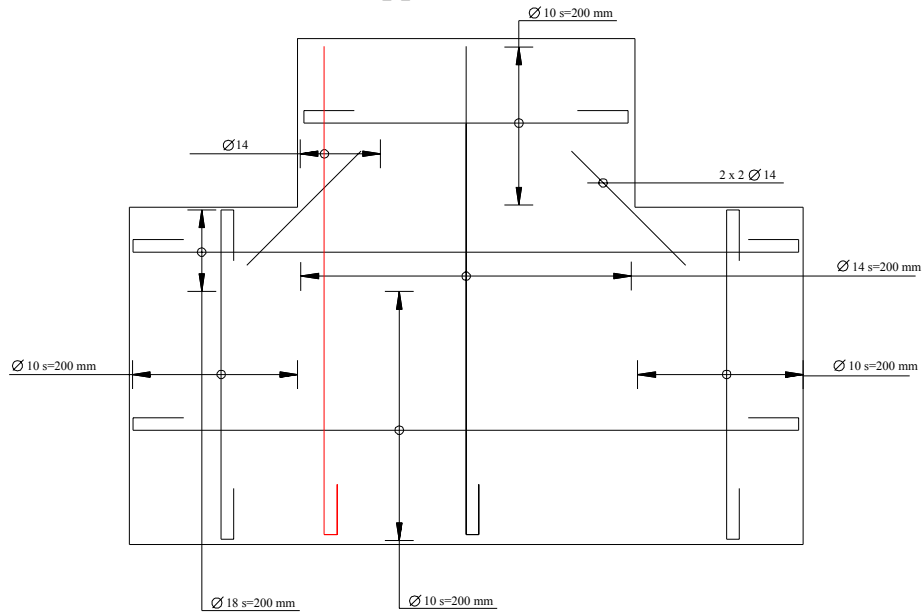
Nappe supérieure



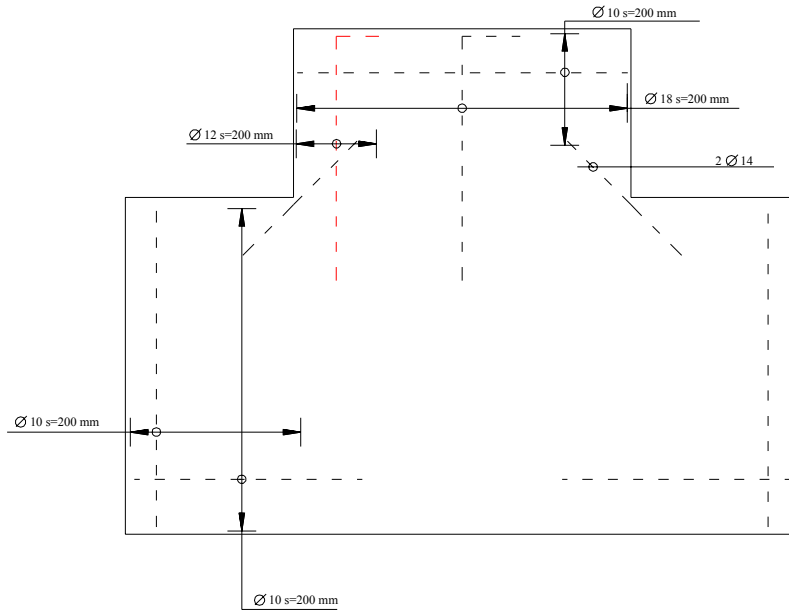
— armature pour reprendre la charge du coffrefort

Armature selon la méthode des bandes + armature minimale

Nappe inférieure



Nappe supérieure



3. On décide de placer un coffre-fort carré de 1 m x 1 m d'un poids de calcul $Q_d = 30 \text{ kN}$ à l'endroit spécifié sur la figure 2.

Comme chaque bande travaille de manière dissociée de ses bandes voisines, la disposition d'un coffre-fort n'influence que les bandes 2-2 et 5-5. Les autres bandes restent inchangées. On peut admettre de nouveau que 80% de la charge est transmise dans la direction de la petite portée. La charge du coffre-fort correspond à une charge répartie de $q_{cf,d} = 30 \text{ kN/m}^2$.

Bandes 2-2:

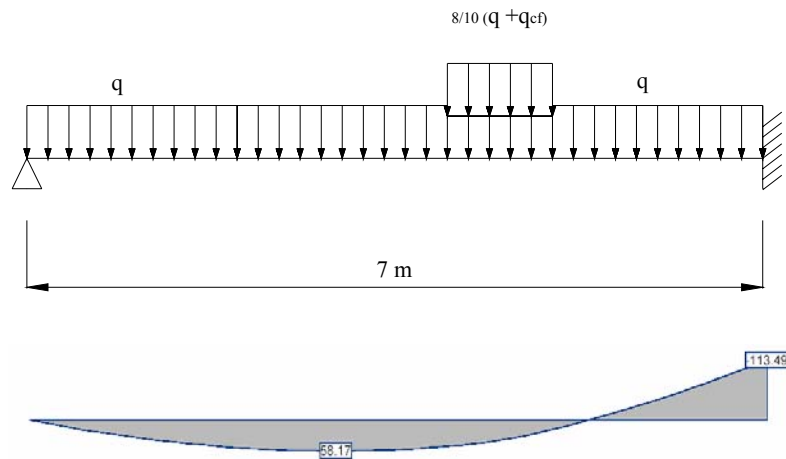


Fig.8. Système statique et chargement de la bande 2-2

En résolvant ce système, on trouve le moment positif maximal qui vaut $M_d = 58 \text{ kNm/m}$ en travée à 3.0 m de l'appui simple. Le moment négatif maximal, à l'encastrement, vaut $M_d = -113 \text{ kNm/m}$

En travée :

Armature en 1^{ère} nappe : $d \cong 200 - 20 - 14/2 = 173 \text{ mm}$

L'armature nécessaire vaut : $a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{58}{0.9 \cdot 0.173 \cdot 0.435} = 856 \text{ mm}^2 / \text{m}$

L'armature déjà calculée pour reprendre le moment positif dans la bande 2-2 est $\phi 14 \text{ } s = 200 \text{ mm}$ donc $a_s = 770 \text{ mm}^2 / \text{m}$. Il faut ajouter $(856 - 770) \text{ mm}^2 = 86 \text{ mm}^2 \Rightarrow 1 \text{ barre } \phi 12$ dans cette bande. On choisit quand même d'ajouter une barre $\phi 14$ pour garder le même diamètre.

Encastrement :

$a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{113}{0.9 \cdot 0.171 \cdot 0.435} = 1688 \text{ mm}^2 / \text{m}$

L'armature déjà calculée pour reprendre le moment négatif dans la bande 2-2 est $\phi 18 \quad s = 200 \text{ mm}$, donc $a_s = 1270 \text{ mm}^2 / \text{m}$.

$1688 - 1270 = 410 \text{ mm}^2 \Rightarrow \phi 12 \quad s = 200 \text{ mm}$ doit être ajoutée (en alternance avec les $\phi 18$)

Bandes 5-5:

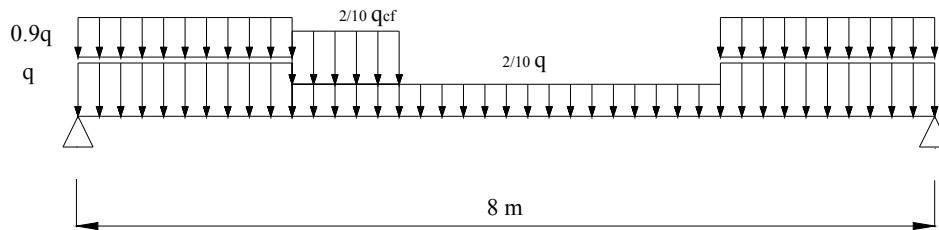


Fig.8. Système statique et chargement de la bande 2-2

En résolvant ce système, on trouve le moment maximal $M_d = 78.3 \text{ kNm} / \text{m}$

Armature en 2^{ème} nappe : $d \cong 200 - 20 - 14 - 18/2 = 157 \text{ mm}$

L'armature nécessaire vaut : $a_s \cong \frac{M_d}{0.9d \cdot f_{sd}} = \frac{78}{0.9 \cdot 0.157 \cdot 0.435} = 1269 \text{ mm}^2 / \text{m}$

L'armature déjà calculée pour reprendre les moments dans la bande 5-5 est $\phi 18 \quad s = 200 \text{ mm}$ soit $a_s = 1270 \text{ mm}^2 / \text{m}$.

L'armature déjà dimensionnée est donc suffisante en présence d'un coffre fort : aucune armature additionnelle en bande 5-5 est nécessaire pour reprendre les moments dus au coffre fort.